DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

E.N.S.I. PROGRAMME P

N. B. — *La question 3 peut être traitée indépendamment des autres questions.*

1

$\mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$ représente l'ensemble des matrices carrées d'ordre p, à éléments réels.

1.1. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$, on pose

$$N(A) = c \cdot \operatorname*{Sup}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} |a_{ij}| ,$$

où c est une constante réelle, positive.

1.11. Montrer que l'on peut déterminer c tel que $A \longrightarrow N(A)$ soit une norme sur $\mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$ vérifiant la propriété :

$$(\forall A \in \mathfrak{M}_p(\mathbf{R})) \quad (\forall B \in \mathfrak{M}_p(\mathbf{R})) \quad N(A.B) \leqslant N(A).N(B)$$

1,12. $\mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$ étant ainsi normé, on envisagera au cours du problème des suites convergentes de matrices. La convergence de telles suites dépend-elle du choix de cette norme sur $\mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$?

1.2. Soit $\mathcal{O}_p$ l'ensemble des endormophismes de $\mathbf{R}^p$, qui possèdent p valeurs propres réelles et distinctes. f et g sont deux éléments de $\mathcal{O}_p$, démontrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors f et g ont les mêmes vecteurs propres.

1.3. $\mathbf{R}^p$ est rapporté à sa base canonique, on représente par le même symbole $\mathcal{O}_p$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_p(\mathbf{R})$ associées aux endomorphismes définis au 1.2 :

1,31. Montrer que pour tout élément A de $\mathcal{O}_p$, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}.A.P$ soit une matrice diagonale.

1.32. Démontrer que deux éléments A et B de $\mathcal{O}_p$ commutent si, et seulement si, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}.A.P$ et $P^{-1}.B.P$ soient diagonales.

1.4. A est un élément de $\mathcal{O}_p$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer l'existence et l'unicité d'un élément B de $\mathcal{O}_p$ à valeurs propres positives ou nulles, et tel que $B^2 = A$.

2

On suppose $p = 3$. I représente la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$.

2,1. A élément de $\mathfrak{G}_3$ peut donc s'écrire sous la forme (cf. 1,31) $P.D.P^{-1}$, D matrice diagonale. Écrire sous une forme analogue :

$$A^n, \quad n \text{ entier positif} ; \quad \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \quad , \quad a_k \in \mathbf{R} \quad , \quad A^0 = I$$

2.2. On pose alors :

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad ; \quad C_n(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}$$

montrer que les deux suites $[S_n(A)]_{n\in\mathbf{N}}$ et $[C_n(A)]_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers des matrices notées sin A et cos A.

2.3. Démontrer que $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = I$.

2,4. A et B sont deux éléments de $\mathfrak{G}_3$ tels que $A.B = B.A$.

Calculer $\cos(A + B)$ et $\sin(A + B)$ en fonction de cos A, cos B, sin A, sin B.

3

L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le mouvement bidifférentiable sur **R**, schématisé par la fonction vectorielle :

$$t \in \mathbf{R} \longrightarrow \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Solution du problème aux conditions initiales :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{5}{2}x + 2y + \dfrac{z}{2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{3}{2}x + 2y - \dfrac{z}{2} = 0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{3}{2}x - 2y - \dfrac{z}{2} = 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{OM}(0) = 2a\vec{i} \ , \ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0) = \vec{0} \ .$$

(a : réel positif)

3,1. Montrer que la trajectoire est plane et former une équation de son plan. En déduire que le mouvement de la projection orthogonale m du point M sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est défini par :

$$(3,1.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}y = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}y = 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{Om}(0) = 2a\vec{i} \ , \ \frac{d\overrightarrow{Om}}{dt}(0) = \vec{0} \ .$$

3,2. Intégrer le système différentiel (3, 1) à l'aide du changement de fonctions : $u = x + y$; $v = x - y$; en déduire la solution de (3).

3,3. Construire la projection orthogonale sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la trajectoire du mouvement défini par le système (3)

4

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

4,1. Montrer que A est élément de $\mathfrak{G}_3$, et déterminer les matrices P et D définies au 1,31.

4,2. Déterminer la matrice B, définie au 1,4, telle que $B^2 = A$.

4,3. Déterminer, en utilisant les résultats du 2,2, la matrice cos tB pour t réel.

1.4. Introduisant les matrices unicolonnes :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le système différentiel (3) peut s'écrire :

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + A.X(t) = \frac{d^2X(t)}{dt^2} + B^2.X(t) = 0$$

Montrer que la solution déterminée au 3.2, peut se mettre sous la forme :

$$X(t) = \cos tB \ . \ X_0$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail